a) $M_1M_2 = |z_2 - z_1| = |-\sqrt{3}(2+2i)| = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$M_0M_1 = |z_1 - z_0| = |\sqrt{3}+\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-\sqrt{3})|$

$= \sqrt{(3+\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}-3)^2}$

$= \sqrt{9+6\sqrt{3}+3+3-6\sqrt{3}+9} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

$M_0M_2 = |z_2 - z_0| = |3-\sqrt{3}-i(\sqrt{3}+3)|$

$= \sqrt{(3-\sqrt{3})^2+(\sqrt{3}+3)^2}$

$= \sqrt{9-6\sqrt{3}+3+9+6\sqrt{3}+3} = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$

D'où $M_1M_2 = M_0M_2 = M_0M_1$ et par suite le triangle $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral

b) puisque le triangle $M_0M_1M_2$ est un triangle équilatéral alors le centre de centre de son cercle circonscrit est son centre de gravité et par suite :

$$z_I = \frac{z_0+z_1+z_2}{3} = \frac{3i+3+\sqrt{3}+i\sqrt{3}+3-\sqrt{3}-i\sqrt{3}}{3}$$

Donc $\boxed{z_I = 2+i}$

Exercice n° 13

$z^3+(\sqrt{3}+i)z^2+(1+i\sqrt{3})z+i=0$

$(-i)^3+(\sqrt{3}+i)(-i)^2+(1+i\sqrt{3})(-i)+i$

$= i - \sqrt{3} - i - i + \sqrt{3} + i = 0$

D'où $(-i)$ est une solution de (E)

(E) est équivalente à l'équation $(z+i)[z^2+az+b]=0$

En développent et par identification on trouve

$a = \sqrt{3}$ et $b = 1$

donc les solutions de (E) sont les solutions de l'équation

$(z+i)(z^2+\sqrt{3}z+1)=0 \Leftrightarrow$

$(z+i)=0$ Où $(z^2+\sqrt{3}z+1)=0$

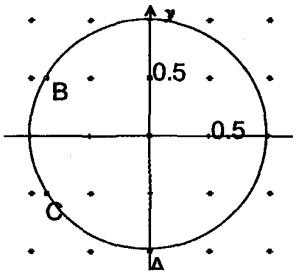
On va résoudre dans $\mathbb{C}$: $z^2+\sqrt{3}z+1=0$

$\Delta = \sqrt{3}^2-4 = -1 = i^2 \Longrightarrow \delta = i$ d'ou $z' = \frac{-\sqrt{3}+i}{2}$

et $z'' = \frac{-\sqrt{3}-i}{2} \Longrightarrow S_{\mathbb{C}} = \{-i, z', z''\}$

a) $z_A = -i$, $z_B = \frac{-\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}i = \cos\frac{5\pi}{6} + i\sin\frac{5\pi}{6}$

Donc : OB = 1 et $\left(\vec{i}, \overrightarrow{OB}\right) \equiv \frac{5\pi}{6}[2\pi]$ et $C = S_{(O,\vec{i})}(B)$



b) $Z = \frac{z_B - z_C}{z_A - z_C} = \frac{z_B - \overline{z_B}}{-i+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i} = \frac{2i\,\mathrm{Im}\,z_B}{\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}i}$

$Z = \frac{2i.\frac{1}{2}}{(\sqrt{3}-i).\frac{1}{2}} = \frac{2i}{\sqrt{3}-i}$

Donc $|Z| = \left|\frac{2i}{\sqrt{3}-i}\right| = \frac{|2i|}{|\sqrt{3}-i|} = \frac{2}{2} = 1$

$\mathrm{Arg}Z \equiv Arg\left(\frac{2i}{\sqrt{3}-i}\right)[2\pi]$

$\equiv Arg(2i) - Arg(\sqrt{3}-i)[2\pi]$

$\equiv \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{6} \equiv \frac{2\pi}{3}[2\pi]$

Conclusion : $\boxed{Z = \left[1, \frac{2\pi}{3}\right]}$

c) $|Z| = \left|\frac{z_B - z_C}{z_A - z_C}\right| = \frac{|z_B - z_C|}{|z_A - z_C|} = \frac{CB}{CA} = 1$

D'où le triangle ABC est isocèle de sommet principal C

Exercice n° 14

$f(x) = (x)^3 + 2(i-\sqrt{3})(x)^2 + 4(1-i\sqrt{3})(x) + 8i$

1) Cherchons $x \in IR^*$ tel que $f(ix) = 0$, en effet :

$f(ix) = 0 \Leftrightarrow$

$(ix)^3 + 2(i-\sqrt{3})(ix)^2 + 4(1-i\sqrt{3})(ix) + 8i = 0 \Leftrightarrow$

$-ix^3 - 2ix^2 + 2\sqrt{3}x^2 + 4ix + 4\sqrt{3}x + 8i = 0 \Leftrightarrow$

$2\sqrt{3}x(x+2) + i(-x^3 - 2x^2 + 4x + 8) = 0$

$f(ix) = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} 2\sqrt{3}(x+2) = 0 \\ -x^3 - 2x^2 + 4x + 8 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x = -2$

Donc :

$z_0 = -2i$ est une racine imaginaire pure de $f(z) = 0$

$f(z) = 0 \Leftrightarrow (z+2i)(z^2+az+b) = 0$

$\Leftrightarrow z^3 + (a+2i)z^2 + (b+2ia)z + 2ib = 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a+2i = 2i - 2\sqrt{3} \\ b+2ia = 4 - 4i\sqrt{3} \\ 2ib = 8i \end{cases} \Leftrightarrow a = -2\sqrt{3}$ et $b = 4$

Qarray.tn - Agra Blech - Qarray.tn